# 2019年上海交通大学国际本科生入学考试大纲

# 数学

## 一、考试目的

上海交通大学留学生本科入学数学考试，是以报考我校的具有高中毕业学历的外国学生为对象而进行的选拔考试。数学考试旨在测试考查考生的数学素养，包括数学基础知识与基本技能、逻辑推理能力、运算能力、空间想象能力、数学应用与探究能力。

## 二、 考试基本要求

留学生本科入学数学考试测试考生各项数学素养如下：

1. 记忆。能识别或记住有关的数学事实材料，使之再认或再现；能在标准的情景中作简单的套用，或按照示例进行模仿；
2. 解释性理解。明了知识的来龙去脉，领会知识的本质，能用自己的语言或转换方式正确表达知识内容；在一定的变式情境中能区分知识的本质属性与非本质属性，会把简单变式转换为标准式，并解决有关的问题；
3. 探究性理解。能把握知识的本质及其内容、形式的变化；能从实际问题中抽象出数学模型或作归纳假设进行探索，能把具体现象上升为本质联系，从而解决问题；会对数学内容进行拓展或对数学问题进行延伸，会对解决问题过程的合理性、完整性、简捷性作有效的思考。

## 三、试卷结构

汉语考试采用笔试的方式进行。笔试共25题，满分**100分**。 汉语笔试要求考生在**90分钟**内完成。答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效。对进入考场的计算器品牌和型号不作规定，但附带计算器功能的无线通讯工具、记忆存储等设备和附带无线通讯功能、记忆存储功能、具有图像功能的计算器不得带入考场。

笔试试卷结构如下：

| **测试题型** | **题量** | | **计分** |
|---|---|---|---|
| 选择题 | 12 题 | 25 题 | 36 |
| 填空题 | 11 题 | | 44 |
| 解答题 | 2 题 | | 20 |
| 合计 | | | 100 |

数学各部分内容在试卷中的占分比例:

| | |
|---|---|
| 代数 | 50% |
| 三角 | 20% |
| 平面解析几何 | 30% |

按测量目标划分:

| | |
|---|---|
| 数学基本知识和基本技能 | 40% |
| 逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力 | 40% |
| 分析问题与解决问题能力、数学探究与创新能力 | 20% |

## 四、考试内容和要求

**文理科共同考试内容：**

一、集合与命题：集合及其表示、子集、交集、并集、补集；命题的四种形式；充分条件、必要条件、充分必要条件；子集推出关系。

二、不等式：不等式的基本性质及其证明；基本不等式；一元二次不等式（组）的解法；分式不等式的解法；含有绝对值的不等式的解法。

三、数列与数学归纳法：数列的有关概念；等差数列；等比数列；简单的递推数列；数列的极限；无穷等比数列各项的和；数列的实际应用问题；数学归纳法；归纳-猜测-论证。

四、函数及其基本性质：函数的有关概念；函数的运算；函数关系的建立；函数的基本性质；简单的幂函数、二次函数的性质；指数函数的性质与图像；

对数；反函数；对数函数的性质与图像；指数方程和对数方程；函数的实际应用。

五、三角比：弧度制，任意角及其度量；任意角的三角比；同比三角比的关系；诱导公式；两角和与差的余弦、正弦、正切；二倍角及半角的正弦、余弦、正切；正弦定理和余弦定理。

六、三角函数：正弦函数和余弦函数的性质；正弦函数与余弦函数的图像；正切函数的性质和图像；函数 $y=A\sin(wx+\phi)$的图像和性质；反三角函数与最简三角方程。

七、平面向量的坐标表示：平面向量的数量积；平面向量分解定理；向量运算的坐标表示；向量平行及向量垂直的坐标关系；向量的度量计算。

八、平面直线的方程：直线的点方向式方程；直线的点法向式方程；直线的一般式方程；直线的倾斜角与斜率；两条直线的平行关系与垂直关系；两条相交直线的交点和夹角；点到直线的距离。

九、曲线与方程：曲线与方程的概念；圆的标准方程和一般方程；椭圆的标准方程和几何性质；双曲线的标准方程和几何性质；抛物线的标准方程和几何性质。

十、排列、组合、二项式定理：乘法原理、排列与排列数、组合与组合数、加法原理、二项式定理。

十一、概率与统计初步：随机事件与概率；等可能事件的概率；总体；抽样调查；统计实习。

十二、复数初步：数的概念的扩展；复数的概念；复平面；复数的四则运算；实系数一元二次方程的解法。

**单文科考查内容和要求：**

1. 生活中的概率与统计。通过对一些典型的统计案例的探究和分析，能初步应用于解决一些简单的实际问题。

2. 数学与文化艺术。会用数学思想方法解释和处理一些音乐美术中的一些问题。

**单理科考查内容和要求：**

1. 概率与统计。掌握两个相互独立事件积的概率计算方法。能熟练运用概率初步的知识，观察、思考和处理一些现实问题。

2. 空间向量。掌握空间向量的线性运算和数量积，领悟类比和推广的数学思维方法。

3. 直线与圆锥曲线的应用。根据平面图形中位置关系运用定义法、代入法、直接法进行解题。

# 数学样卷

考试科目：数学（理科）　　考试用时：90 分钟　　满分 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 |
|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | |

## 一、单项选择题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

1. 设 m,n ∈ R，则“m+n ＞ 4”是“m ＞ 2 且 n ＞ 2”的（　　）.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分也非必要条件

2. $A=\{x|x+1>0\}$，B={-2,-1, 0, 1}，则（$C_RA$）$\cap B=$　　（　　）.

（A）{-2，-1}　　(B){-2}　　（C）{-1,0,1}　　（D）{0,1}

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_5=19, S_5=40,$则$a_{10}=$　　（　　）.

（A）28　　(B)27　　（C）29　　（D）30

4 已知不等式（x+y）($\frac{1}{x}+\frac{a}{y}$)≥9，对任意正数 x、y 恒成立，则正实数$a$的最大值是(　　).

（A）2　　(B)4　　（C）6　　（D）8

5. 双曲线$\frac{x^2}{10}-6=-1$ 的焦点坐标是　　（　　）.

（A）（±2,0）　　(B)（±4,0）　　（C）（0，±2）　　（D）（0，±,4）

6. 当$\frac{2}{3}<m<1$时，复数z=(3m−2)+(m−1)i在复平面上对应的点位于　　（　　）

（A）第一象限　　(B)第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

7. 若$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5},\tan(\alpha+\beta)=1,$且$\alpha$是第三象限的角，则$\tan\beta$的值是（　　　）.

（A）$\dfrac{4}{3}$　　　　　(B) $-\dfrac{4}{3}$　　　　　（C）$\dfrac{1}{7}$　　　　　（D）$-\dfrac{1}{7}$

8.　已知等比数列{$a_n$}的前 5 项和为 10，前 10 项和为 50，求这个数列的前 15 项和是（　　　）.

（A）210　　　　(B)90　　　　（C）75　　　　（D）250

9.在三角形 ABC 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$,则三角形 ABC 的形状是　（　　　）.

（A）钝角三角形　(B)直角三角形　（C）锐角三角形　（D）不能确定

10．经过点 P（5,2），Q（3，-2）两点，且圆心在直线 y=2x-3 上，那么该圆的圆心为（　　　）.

（A）（1，-2）　　(B)（-1，-5）　　（C)（2，1）　　（D)（0，-3）

11．若$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(ax^2-2x+4)$的定义域为$R$，则$a$的取值范围是（　　　）.

（A）$(\dfrac{1}{4},+\infty)$　　（B）$[\dfrac{1}{2},+\infty)$　　（C）$[\dfrac{1}{4},+\infty)$　　（D）$[\dfrac{1}{8},+\infty)$

12．6 人站成一排照相，其中甲，乙，丙三人要站在一起，且要求乙，丙分别站在甲的两边，则不同的排法种数为（　　　）.

（A）12　　　（B） 24　　　（C）48　　　（D）144

## 二、填空题（本大题共 11 题，每题 4 分，满分 44 分）

13．若实数 x,y 满足 xy=1,则 $x^2+2y^2$ 的最小值是 ____________________.

14．设全集 U=R，若集合 A={1,2,3,4}，B={x|2≤x≤3}，则 A∩$C_uB$= ________________.

15．已知平行直线 1:2x+y-1=0,直线 2:2x+y+1=0,则直线 1 与直线 2 的距离是__________________ .

16．函数 $y=1-3\sin^2 x$ 的最小正周期是_____________________________________.

17.双曲线的顶点为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的焦点，双曲线的焦点为椭圆的顶点，则此双曲线的方程是

____________________________________________________________________.

18．规定记号“*”表示一种运算，即 $m*n=\sqrt{mn}+m+n$（m、n∈R*），若 $1*k=3$，则函数 $y=k*x$ 的值域是________________________.

19. 为强化安全意识，某商场拟在未来的连续 10 天随机选择 3 天进行紧急疏散演练，则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是__________________（结果用最简分数表示）.

20. 圆心在 y 轴上，经过点 A（1，-1），B（3，1）的圆的方程为___________________.

21.在 $(2x+\frac{1}{x^2})^6$ 的二项展开式中，常数项等于__________________.

22. 向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $|\vec{b}|=$______________.

23.一辆卡车要通过跨度为 8 米，拱高为 4 米的抛物线形隧道，为了保证安全，车顶上方与隧道拱顶的铅垂距离至少 0.5 米。如果隧道为单向行驶，卡车宽为 2.2 米，车厢视为长方体，则卡车的限高是______________________米（精确到 0.01 米）。

## 三、解答题（本大题共 2 题，每小题 10 分，满分 20 分）

24. 已知复数 $z_1$ 满足（$z_1$-2）（1+i）=1-i（i 为虚数单位），复数 $z_2$ 的虚部为 2，且 $z_1\cdot z_2$ 是实数，求 $z_2$

25. 根据预测，某地第 n（n∈N*）个月共享单车的投放量和损失量分别为 $a_n$ 和 $b_n$（单位：辆），其中 $a_n=\begin{cases}5n^4+15 & 1\leqslant n\leqslant 3\\ -10n+470 & n\geqslant 4\end{cases}$，$b_n=n+5$，第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差。

（1）求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量；

（2）已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n=-4(n-46)^2+8800$（单位：辆）. 设在某月底，共享单车保有量达到最大，问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量？

# 参考答案（数学理科样卷）

## 一．选择题：（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| B | A | C | B | D | D |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| D | A | A | C | A | C |

## 二．填空题：（本大题共 11 题，每题 4 分，满分 44 分）

**13.** $2\sqrt{2}$

**14.** $\{1,4\}$

**15.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

**16.** π

**17.** $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

**18.** （1，+∞）

**19.** $\dfrac{1}{15}$

**20.** $x^2+(y-2)^2=10$

**21.** 240

**22.** $\dfrac{1}{2}$

**23.** 3.20

## 三．解答题：（本大题共 2 题，每题 10 分，满分 20 分）

**24.** ∵（$z_1$−2）（1+i）=1−i，$z_1$=2−i

设 $z_2$=a+2i，a∈R，

$z_1z_2$=（2−i）（a+2i）=(2a+2)+(4−a)i

∵ $z_1z_2$∈R，a=4

∴ $z_2$=4+2i

**25.** （1）($a_1+a_2+a_3+a_4$)−($b_1+b_2+b_3+b_4$)=935.

（2）设第 n 个月底，共享单车保有量为 $B_n$，

$B_1$=20-6=14, $B_2$ =115-13=102, $B_3$ =535-21=514,

当 n≥4 时，$B_n = \dfrac{-11n^2+919n-1630}{2}$

∵ $\dfrac{919}{22}$≈41.78

∴当 n=42 时，$B_{42}$ =8782 为最大值.

$S_{42}$ =8736.

∵8782＞8736，
∴第 42 个月底单车保有量超过了容纳量.

# 数学样卷

考试科目：数学（文科）　　　考试用时：90 分钟　　　　　满分 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 得分 | | | | |

## 一、单项选择题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

1. 不等式 $1<|x-2|\leqslant 3$ 解集为　　　　　　　　　　　　　（　　　）.

(B) [3, 5]　　(B) [-1, 1) ∪ (3, 5]　　(C) [-1, 1] ∪ (3, 5]　　(D) [-1, 5)

2. $A=\{x|x+1>0\}$，B={-2,-1, 0, 1}，则（$C_R A$）$\cap B$=　　　　　　（　　　）.

(B) {-2，-1}　　(B) {-2}　　(C) {-1, 0, 1}　　(D) {0, 1}

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_5=19, S_5=40$, 则$a_{10}$=　　　　　　（　　　）.

(A) 28　　(B) 27　　(C) 29　　(D) 30

4. $\overrightarrow{AB}=(2,-3), \overrightarrow{BC}=(1,2)$，则$|\overrightarrow{AC}|$=　　　　　　（　　　）.

(A) $\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{10}$　　(D) 10

5. 椭圆方程 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{11}=1$，则它的焦距是　　　　　　（　　　）.

(A) 6　　(B) 3　　(C) $\sqrt{31}$　　(D) $2\sqrt{31}$

6. 当$\frac{2}{3}<m<1$时，复数z=(3m−2)+(m−1)i在复平面上对应的点位于 （ ）.

（A）第一象限 (B)第二象限 （C）第三象限 （D）第四象限

7. 若$\sin\alpha=-\frac{4}{5},\tan(\alpha+\beta)=1,$且$\alpha$是第三象限的角，则$\tan\beta$的值是（ ）.

（A）$\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{4}{3}$ （C）$\frac{1}{7}$ （D）$-\frac{1}{7}$

8. 函数$y=\sqrt{-x^2+4x-3}$的最大值和最小值是 （ ）.

（A）1 和 0 (B)1 和 3 （C）-1 和 0 （D）1 和$\sqrt{3}$

9. 函数y=sin(2x+$\frac{\pi}{6}$)+cos(2x+$\frac{\pi}{3}$) 的最小正周期和最大值分别是 （ ）.

（A）π，1 (B) π，$\sqrt{2}$ （C）2π，1 （D）2π，$\sqrt{2}$

10. 在等比数列{$a_n$}中，已知 $a_3a_6a_9$=27, 则 $a_6$= （ ）.

（A）3 (B)5 （C）9 （D）$3\sqrt{3}$

11. 若$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(ax^2-2x+4)$的定义域为$R$，则$a$的取值范围是 （ ）.

（A）$(\frac{1}{4},+\infty)$ （B）$[\frac{1}{2},+\infty)$ （C）$[\frac{1}{4},+\infty)$ （D）$[\frac{1}{8},+\infty)$

12. 6 人站成一排照相，其中甲，乙，丙三人要站在一起，且要求乙，丙分别站在甲的两边，则不同的排法种数为（ ）.

（A）12 （B） 24 （C）48 （D）144

## 二、填空题（本大题共 11 题，每题 4 分，满分 44 分）

13. 学校组织体检，6 位学生的身高（单位：米）分别是 1.72,1.78，1.75,1.80，1.69,1.77，则这组数据的中位数是____________（米).

14. 若 sinx+cosx=$\frac{1}{2}$, 则 sin2x=____________.

15. 点（m,-2）到直线 3x-4y+4=0 的距离为 1，则 m=____________ .

16. 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n^2-2}{n^2+n+1})$ =________________________________.

17. 双曲线的顶点为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的焦点，双曲线的焦点为椭圆的顶点，则此双曲线的方程是________________________________________________________.

18. 抛物线 $5x^2=y$ 的焦点到准线的距离是 ________________________.

19. 某种细菌在培养的过程中，每 20 分钟分裂一次（一个分裂为 2 个），经过 3 个小时，这种细菌可由 1 个繁殖到______________________________.

20. 圆心在 y 轴上，经过点 A（1，-1），B（3,1）的圆的方程为___________________.

21. 计算$\begin{vmatrix}15 & 7\\ 8 & 20\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=$ ____________________________________________ .

22. 向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{a}-\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60^\circ$，则$|\vec{b}|=$ ______________ .

23. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_5+2a_3a_5+a_3a_7=25$,则$a_3+a_5=$ ____.

## 三、解答题（本大题共 2 题，每小题 10 分，满分 20 分）

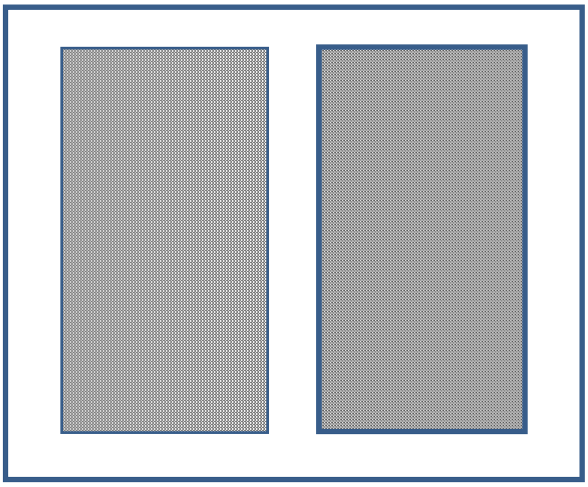
一

24.（1）分别计算 2,2+4,2+4+6,2+4+6+8 的值；

（2）根据（1）的计算，猜想 2+4+6+…+2n 的表达式；

（3）用数学归纳法证明你的猜想。

25. 如下图所示，要设计一张矩形广告，该广告含有大小相等的左右两个矩形栏目（即图中阴影部分），这两栏的面积之和为 18000 平方厘米，四周空白的宽度为 10 厘米，两栏之间的中缝空白的宽度是 5 厘米，怎样确定广告的高与宽的尺寸（单位：厘米）能使矩形广告面积最小？



# 参考答案（数学文科样卷）

## 一．选择题：（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| B | A | C | C | A | D |
| **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| D | A | A | A | A | C |

## 二．填空题：（本大题共 11 题，每题 4 分，满分 44 分）

**13.** 1.76

**14.** $-\frac{3}{4}$

**15.** $-\frac{7}{3}$或$-\frac{17}{3}$

**16.** 2

**17.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

**18.** $\frac{1}{10}$

**19.**　512 个　　　　**20.**　$x^2+(y-2)^2=10$

**21.** 251　　　　**22.** $\frac{1}{2}$

**23.**5

## 三．解答题：（本大题共 2 题，每题 10 分，满分 20 分）

**24.** (1)2,6,12,20
(2) 猜想表达式：2+4+6+…+2n=n(n+1)
(3) (i)当 n=1 时，左边=2，右边=2，猜想成立；
（ii）假设当 n=k(k∈N*，k≥1）时，猜想成立，即 2+4+6+…2k=k(k+1)；
那么当 n=k+1 时，2+4+6+…+2k+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)=(k+1)[(k+1)+1]猜想成立，
根据（i）和（ii）可以断定 2+4+6+…+2n=n(n+1)对任何 n∈N 都成立。

**25.**解法 1：设矩形栏目的高为 acm，宽为 bcm，则 ab=9000.　　①
广告的高为 a+20，宽为 2b+25，其中 a＞0，b＞0.
广告的面积 S＝(a+20)(2b+25)
＝2ab+40b+25a+500＝18500+25a+40b
$\geq 18500+2\sqrt{25a\cdot 40b}=18500+\sqrt{1000ab}=24500.$

当且仅当 25a＝40b 时等号成立，此时 b=$\frac{5}{8}a$，代入①式得 a=120，从而 b=75.
即当 a=120，b=75 时,S 取得最小值 24500.
故广告的高为 140 cm,宽为 175 cm 时，可使广告的面积最小。
解法 2：设广告的高为宽分别为 x cm，y cm，则每栏的高和宽分别为 x－20，$\frac{y-25}{2}$，其中 x＞20，y＞25

两栏面积之和为 2(x－20)$\frac{y-25}{2}=18000$，由此得 y=$\frac{18000}{x-20}+25,$

广告的面积 S=xy=x($\frac{18000}{x-20}+25$)＝$\frac{18000}{x-20}+25$x,

整理得 S=$\frac{360000}{x-20}+25(x-20)+18500.$

因为 x－20＞0，所以 S≥2$\sqrt{\frac{360000}{x-20}\times 25(x-20)}+18500=24500.$

当且仅当$\frac{360000}{x-20}=25(x-20)$时等号成立，

此时有$(x-20)^2=14400(x>20)$，解得 $x=140$，代入 $y=\frac{18000}{x-20}+25$,得 $y=175$，即当 $x=140$，$y=175$ 时，S 取得最小值 24500，

故当广告的高为 140 cm，宽为 175 cm 时，可使广告的面积最小。